MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 2
30.10.2019

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Lösungsvorschlag-

1. a) Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = y \cdot (x-z)^2,$$

ist, wie man sofort sieht, zweimal stetig partiell differenzierbar mit

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \big(2y \cdot (x-z)\,,\; (x-z)^2\;,\; -2y \cdot (x-z)\big)$$

und

$$\operatorname{Hess} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y & 2(x-z) & -2y \\ 2(x-z) & 0 & -2(x-z) \\ -2y & -2(x-z) & 2y \end{pmatrix}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

b) Es gilt mit a)

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (0,0,0) \iff x - z = 0 \iff x = z.$$

Damit sind die kritischen Punkte

$$(a,b,a) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{mit } a,b \in \mathbb{R},$$

c) Im kritschen Punkt $(a,b,a) \in \mathbb{R}^3$ mit $a,b \in \mathbb{R}$, ist

$$\operatorname{Hess} f(a,b,a) = \begin{pmatrix} 2b & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 0 \\ -2b & 0 & 2b \end{pmatrix}.$$

Da $\det \begin{pmatrix} 2b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ ist $\operatorname{Hess} f(a,b,a)$ nach dem Hurwitz-Kriterium weder positiv, noch negativ definit.
Um zu zeigen, daß $\operatorname{Hess} f(a,b,a)$ auch nicht indefinit ist, bestimmen wir die Eigenwerte von f über das charakteristische Polynom $\chi(\lambda)$ von $H := \operatorname{Hess} f(a,b,a)$. Es ist

$$\begin{aligned}\chi_H(\lambda) = \begin{vmatrix} 2b-\lambda & 0 & -2b \\ 0 & 0-\lambda & 0 \\ -2b & 0 & 2b-\lambda \end{vmatrix} &= (-1)^{2+2}\,(-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2b-\lambda & -2b \\ -2b & 2b-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda) \cdot \left[(2b-\lambda)^2 - 4b^2\right] = (-\lambda) \cdot (2b-\lambda-2b) \cdot (2b-\lambda+2b) = \lambda^2 \cdot (4b-\lambda).\end{aligned}$$

Damit hat die symmetrische Matrix $\operatorname{Hess} f(a,b,a)$ die Eigenwerte 0 und $4b$. Also hat die Matrix $\operatorname{Hess} f(a,b,a)$ für $b > 0$ zwar einen positiven, aber keinen negativen Eigenwert; für $b < 0$ gibt es zwar einen negativen, aber keinen positiven Eigenwert; und für $b = 0$ existiert weder ein positiver noch ein negativer Eigenwert. Damit ist $\operatorname{Hess} f(a,b,a)$ nicht indefinit.

2. a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wir führen den Beweis mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums:

„$\Longrightarrow$“: Sei A positiv definit.
Dann ist nach dem Hurwitz-Kriterium $\det A > 0$ und $a > 0$. Aus

$$\det A = ad - b^2 > 0$$

folgt wegen $a > 0$, daß

$$d > \frac{b^2}{a} \geq 0,$$

also ist $\mathrm{Spur} A = a + d \geq a > 0$.

„$\Longleftarrow$“: Gelte $\det A > 0$ und $\mathrm{Spur} A > 0$.
Annahme: $a \leq 0$. Dann folgt wegen $\mathrm{Spur} A = a + d > 0$, daß $d > -a \geq 0$. Also ist

$$\det A = \underbrace{ad}_{\leq 0} - b^2 \leq 0 - b^2 \leq 0,$$

ein Widerspruch. Also ist $a > 0$ und die Matrix nach dem Hurwitz-Kriterium positiv definit.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch und positiv definit. Wegen $A = A^T$ ist A diagonalisierbar und

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} =: D,$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte von A bezeichnen (nicht notwendig verschieden). Weil A positiv definit, sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. Da ähnliche Matrizen diesselbe Spur und dieselbe Determinante besitzen, gilt

$$\mathrm{Spur} A = \mathrm{Spur} D = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 0 \quad \text{und} \quad \det A = \det D = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0.$$

(Genauso kann man auch „$\Longrightarrow$“ in a) zeigen.)

Zum Beweis, daß „$\Longleftarrow$“ im Fall $n = 3$ i.a. nicht gilt, kann man z.B. die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

betrachten. A ist symmetrisch mit $\det A = 3 > 0$ und $\mathrm{Spur} A = 1 > 0$, jedoch nicht positiv definit, weil sie mit -1 einen negativen Eigenwert besitzt.

3. Zur gegebenen Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 2\,x\,y\,e^{\sqrt{x^2+y^2}},$$

betrachten wir die beiden Schnittfunktionen g_1 und g_2 durch den Punkt $(0,0)$: Es ist

$$g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_1(x) = 0, \qquad \text{die Nullfunktion (diffbar in } x = 0)$$

und auch

$$g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_2(y) = 0, \qquad \text{ist die Nullfunktion (diffbar in } y = 0).$$

Also ist f partiell diffbar in $(0,0)$ mit

$$\mathrm{grad}\, f(0,0) = (g_1'(0), g_2'(0)) = (0,0).$$

Damit ist $(0,0)$ ein kritischer Punkt von f.

Die Nullstellen von f sind wegen

$$f(x,y) = 0 \iff 2\,x\,y\,\underbrace{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}_{>0} = 0 \iff x\,y = 0 \iff x = 0 \text{ oder } y = 0$$

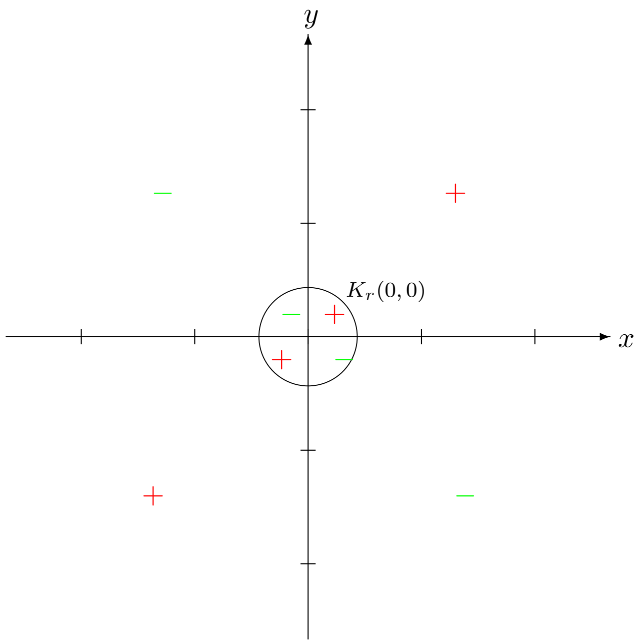
genau die Punkte auf den beiden Koordinatenachsen $x = 0$ (y–Achse) und $y = 0$ (x–Achse). Des weiteren nimmt die Funktion f wegen

$$f(x,y) > 0 \iff 2\,x\,y\,\underbrace{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}_{>0} > 0 \iff$$
$$\iff x\,y > 0 \iff \big(x > 0 \text{ und } y > 0\big) \text{ oder } \big(x < 0 \text{ und } y < 0\big)$$

in den Punkten der offenen 1. und 3. Quadranten positive Werte und wegen

$$f(x,y) < 0 \iff 2\,x\,y\,\underbrace{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}_{>0} < 0 \iff$$
$$\iff x\,y < 0 \iff \big(x < 0 \text{ und } y > 0\big) \text{ oder } \big(x > 0 \text{ und } y < 0\big)$$

in den Punkten der offenen 2. und 4. Quadranten negative Werte an.



Es ist $f(0,0) = 0$; da nun in jedem Kreis $K_r(0,0)$ um $(0,0)$ mit Radius $r > 0$ sowohl Punkte des 1. bzw. 3. Quadranten mit positiven Funktionswerten als auch Punkte des 2. bzw. 4. Quadranten mit negativen Funktionswerten liegen, kann f in $(0,0)$ kein lokales Extremum besitzen.

4. Die gegebene Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x + \frac{4}{x} - \frac{3}{y} + \frac{1}{y^3},$$

mit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\}$$

ist, man leicht feststellt, zweimal stetig partiell diffbar mit

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(1 - \frac{4}{x^2},\ \frac{3}{y^2} - \frac{3}{y^4}\right)$$

und

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{8}{x^3} & 0 \\ 0 & -\frac{6}{y^3} + \frac{12}{y^5} \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in D.$$

Wir suchen die kritischen Stellen von f, also $(x, y) \in D$ mit $\operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0)$.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) &\iff 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{3}{y^2} - \frac{3}{y^4} = 0 \\
&\iff x^2 = 4 \quad \wedge \quad y^2 = 1 \\
&\iff x = \pm 2 \quad \wedge \quad y = \pm 1 \\
&\iff (x,y) = (2,1) \;\;,\;\; (2,-1) \;\;,\;\; (-2,1) \;\;,\;\; (-2,-1)
\end{aligned}$$

Demnach sind die kritischen Stellen die genau die vier Punkte

$$(2,1), \qquad (2,-1), \qquad (-2,1), \qquad (-2,-1),$$

also kommen nur diese als Stellen lokaler Extrema von f in Frage.

Wir untersuchen das Verhalten von f bei den ermittelten kritischen Punkten mit Hilfe der Hessematrix:

i) Zu $(x, y) = (2, 1)$:
Es gilt

$$\operatorname{Hess} f(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

und es ist $\det(\operatorname{Hess} f(2, 1)) = 6 > 0$ und $\partial_1\partial_1 f(2, 1) = 1 > 0$, also besitzt f nach Satz 1.13 in $(2, 1)$ ein (strenges) lokales **Minimum** [$\operatorname{Hess} f(2, 1)$ ist **positiv definit**].

ii) Zu $(x, y) = (2, -1)$:
Es gilt

$$\operatorname{Hess} f(2,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix},$$

und es ist $\det(\operatorname{Hess} f(2, -1)) = -6 < 0$; also besitzt f nach Satz 1.13 in $(2, -1)$ **kein** lokales Extremum [Die Hesse-Matrix ist in diesem Punkt **indefinit**]; f hat in $(2, -1)$ einen **Sattelpunkt**.

iii) Zu $(x, y) = (-2, 1)$:
Es gilt

$$\operatorname{Hess} f(-2,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

und es ist $\det(\operatorname{Hess} f(-2, 1)) = -6 < 0$; also besitzt f nach Satz 1.13 in $(-2, 1)$ **kein** lokales Extremum [Die Hesse-Matrix ist in diesem Punkt **indefinit**]; f hat in $(-2, 1)$ einen **Sattelpunkt**.

iv) Zu $(x, y) = (-2, -1)$:
Es gilt

$$\operatorname{Hess} f(-2,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix},$$

und es ist $\det(\operatorname{Hess} f(-2, -1)) = 6 > 0$ und $\partial_1\partial_1 f(-2, -1) = -1 < 0$, also besitzt f nach Satz 1.13 in $(-2, -1)$ ein (strenges) lokales **Maximum** [$\operatorname{Hess} f(-2, -1)$ ist **negativ definit**].

Folglich besitzt die Funktion f genau zwei lokale Extrema, nämlich das (strenge) lokale Minimum in dem Punkt $(2, 1)$, und das (strenge) lokale Maximum in dem Punkt $(-2, -1)$.